数理解析研究所講究録
1089 巻 1999 年 186-190

正再帰マルコフ連鎖に関する 初再帰時間の分数冪モーメントについて

東京工業大学　志賀徳造 (SHIGA Tokuzo)
名古屋市立大学　清水昭信 (SHIMIZU Akinobu)
横浜国立大学　曽雌隆洋 (SOSHI Takahiro)

1　問題と結果

S は可算集合とし、$(X_t, P_x)_{t\geq 0, x\in S}$ は状態空間 S 上の連続時間マルコフ連鎖とする。マルコフ連鎖の推移確率は $p_t(x,y), x, y \in S$ で表し、その生成行列を $\{q(x,y)\}_{x,y\in S}$ で表す。ここで、$q(x) = -q(x,x)$ とおく。

ここで、マルコフ連鎖 $(X_t, P_x)_{t\geq 0, x\in S}$ は既約かつ正再帰を仮定する。T を初再帰時間、すなわち

$$T = \inf\{t > 0; X_t = X_0 \quad and \quad X_s \neq X_0 \quad for \quad some \quad s < t\}$$

とする。これらの仮定の下で、$E_x[T] < +\infty$ であり、唯一の定常分布$\pi = (\pi(x))$ が存在し、$\pi(x) = \frac{1}{q(x)E_x[T]}$ と表される。

$(\mathbf{X}_t, \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{(n)})$ は推移行列 $\{\mathbf{p}_t(\mathbf{x},\mathbf{y})\}_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in S^n}$ が

$$\mathbf{p}_t(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Pi_{j=1}^n p_t(x_j, y_j),$$

で与えられる n 粒子系とする。ここで、S^n は S の n 重直積集合、$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S^n$ 、$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in S^n$ とする。 $\mathbf{T}$ を n 粒子系 $(\mathbf{X}_t, \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{(n)})$ の初再帰時間とする。

我々は、次の問題を議論する。
α を 1 以上の実数、n を自然数とする。このとき、

$$E_x[T^\alpha] < +\infty \quad \text{ならば} \quad \mathbf{E}_{\mathbf{x}}^{(n)}[\mathbf{T}^\alpha] < +\infty \quad \text{が成立するだろうか？}$$

ここで、S 上のある x に対して、$E_x[T^\alpha] < +\infty$ ならば S 上の任意の x に対して、$E_x[T^\alpha] < +\infty$ であるので、この報告を通して、T と $\mathbf{T}$ のモーメントについて述べるときに、特に初期状態については注意しないことにする。

$\alpha = 1$ の場合、問題は自明である。なぜなら、n 粒子系は正再帰でありその定常分布 $\pi^{(n)} = (\pi^{(n)}(\mathbf{x}))$ は

$$\pi^{(n)}(\mathbf{x}) = \Pi_{j=1}^n \pi(x_j), \quad for \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S^n$$

であるからである。
次の結果が得られる。
定理 1.$\alpha > 1$ とする。そのとき、次の (a) と (b) は同値である。

$$(a) \quad E_x[T^\alpha] < +\infty$$
$$(b) \quad \limsup_{\lambda \downarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{\alpha-2}(p_t(x,x) - \pi(x))dt < +\infty$$

$\Omega \times \Omega$ 上の直積測度 $P_x \otimes P_x$ に関する期待値を $E_x \otimes E_x[\cdot]$ で表す。任意の $(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega$ に対し、$\mathbf{T}_i, i = 1, 2,$ を次で定義する：

$$\mathbf{T}_1(\omega, \omega') = T(\omega), \quad \mathbf{T}_2(\omega, \omega') = T(\omega')$$

尚、この報告を通して、$\mathbf{T}_1$、$\mathbf{T}_2$ をそれぞれ T、T' で表すことにする。任意の実数に対し、$\log_+ x = (\log x) \vee 0$ 、$x_+ = x \vee 0$ で表す。

定理 2.
(i) $\alpha > -1$ とする。そのとき、次の (a) と (b) は同値である。

$$(a) \quad E_x \otimes E_x[TT'(T \wedge T')^{\alpha+1}] < +\infty$$
$$(b) \quad \int_1^{+\infty} t^\alpha (p_t(x,x) - \pi(x))^2 dt < +\infty$$

(ii) 次の (c) と (d) は同値である。

$$(c) \quad E_x \otimes E_x[TT' \log_+(T \wedge T')] < +\infty$$
$$(d) \quad \int_1^{+\infty} t^{-1}(p_t(x,x) - \pi(x))^2 dt < +\infty$$

定理 3. $\alpha \geq 1$ とする。次の (a) と (b) は同値である。

$$(a) \quad E_x[T^\alpha] < +\infty$$
$$(b) \quad \mathbf{E}_{\mathbf{x}}^{(n)}[\mathbf{T}^\alpha] < +\infty$$

2 動機と応用

n 粒子系 $(\mathbf{X}_t, \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{(n)})$ において、各 colony $x \in S$ に滞在する粒子数のみに着目したマルコフ連鎖を考える。これは、次の

$$I_n = \{\alpha = \{\alpha_k\}_{k \in S}; \alpha_k \in Z_+ \ , \ \sum_{k \in S} \alpha_k = n\}$$

を状態空間とし、生成行列 Q は、

$$Q_{\alpha\beta} = \begin{cases} \alpha_k q(k,k'), & \text{if } \beta = \alpha - \epsilon_k + \epsilon_{k'}, \\ \sum_{k\in S} \alpha_k q(k,k), & \text{if } \beta = \alpha, \end{cases}$$

で与えられる。
S^n の元 $\mathbf{x}$ に対して、I_n の元 α が唯一に定まる。この写像を φ とする。即ち、$\varphi(\mathbf{x}) = \alpha$ 。$\Gamma_\alpha = \{\mathbf{x} \in S^n; \varphi(\mathbf{x}) = \alpha\}$ とおく。任意の $\mathbf{x} \in \Gamma_\alpha$ に対して、

$$q(\mathbf{x}, \Gamma_\beta) = \sum_{\mathbf{y}\in\Gamma_\beta} q(\mathbf{x},\mathbf{y})$$

は、$\mathbf{x} \in \Gamma_\alpha$ に依存しない。これが上記 $Q_{\alpha\beta}$ である。
一方、$\{q_{k'k}\}$ を k' から k への移住率とする。stepping stone Fleming-Viot process の定常状態においてある遺伝的量 (無作為抽出した有限個の遺伝子の中の対立遺伝子数の平均の期待値) のみたす式を考える。これは $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ を状態空間とし、次の行列 $\{Q^m_{\alpha\beta}\}$ を用いて表される。 $\epsilon_k = (\delta_{ki})_{i\in S}$ として、

$$Q^m_{\alpha\beta} = \begin{cases} \binom{\alpha_k}{2} + \frac{\theta}{2}\alpha_k, & \text{if } \beta = \alpha - \epsilon_k, \\ \alpha_k m q_{k'k}, & \text{if } \beta = \alpha - \epsilon_k + \epsilon_{k'} \ (k \neq k'), \\ -\sum_{k\in S}\left(\binom{\alpha_k}{2} + \frac{\theta}{2}\alpha_k\right) + \sum_{k\in S} \alpha_k m q_{kk}, & \text{if } \beta = \alpha, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

この行列で生成されるマルコフ連鎖は、1つの colony に 2個以上の粒子があるときは、一定の割合で、粒子数が1つ減る (coalescent) という運動となっている。
粒子数が1つ減る時間を T_0 とすると、$E_\alpha[T_0] = u_m(\alpha)$ は次の式をみたす:

$$\sum_{k'} \alpha_k m q_{k'k} u_m(\alpha - \epsilon_k + \epsilon_{k'}) - V(\alpha) u_m(\alpha) = -1$$

$q(k,k') = q_{k'k}$ とすると、

$$m\sum_\beta Q_{\alpha\beta} u_m(\beta) - V(\alpha)u_m(\alpha) = -1$$

である。ここで、$V(\alpha) = \sum_{k\in S}\left(\binom{\alpha_k}{2} + \frac{\theta}{2}\alpha_k\right)$ である。
この式は、$\mathbf{x} \in \Gamma_\alpha$ のとき、

$$m\sum_{\mathbf{y}} q(\mathbf{x},\mathbf{y}) u_m(\varphi(\mathbf{y})) - V(\varphi(\mathbf{x})) u_m(\varphi(\mathbf{x})) = -1$$

とかける。有界な解の一意性から $\tilde{V}(\mathbf{x}) = V(\varphi(\mathbf{x}))$ として、

$$m\sum_{\mathbf{y}} q(\mathbf{x},\mathbf{y}) v_m(\mathbf{y}) - \tilde{V}(\mathbf{x}) v_m(\mathbf{x}) = -1$$

を考えることと同値である。この式において、$m \to +\infty$ の極限を考える。即ち、移住率が非常に大きいときの $v_m(\mathbf{x})$ について調べる。

$\tilde{V}(\mathbf{x})$ を遺伝的意味のある関数から離れて、ある $0 < c_1 < c_2 < +\infty$ に対して、$0 < c_1 \le \tilde{V}(\mathbf{x}) \le c_2$ をみたす関数全体を $\mathcal{V}$ とする。

$\{q(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}$ が正再帰マルコフ連鎖であるとき、任意の $\tilde{V} \in \mathcal{V}$ に対して

$$\lim_{m\to\infty} v_m(\mathbf{x}) = \frac{1}{<\tilde{V}>}\ ,\ <\tilde{V}>\ \text{は定常分布による}\ \tilde{V}\text{の平均}, \qquad (*)$$

であるが、この収束の速さを問題にする。

n を自然数とする。任意の $\tilde{V} \in \mathcal{V}$ と任意の $\mathbf{x} \in S^n$に対して,収束 $(*)$ が $\frac{1}{m}$ 以上の速さであることと $\mathbf{E}^{(n)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{T}^2) < +\infty$ が同値であることがわかる。ここで、$E_x(T^2) < +\infty$ と $\mathbf{E}^{(n)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{T}^2) < +\infty$ が同値かどうかが問題となる。

定理３ によれば、

$$E_x(T^2) < +\infty\ \text{と}\ \mathbf{E}^{(n)}_{\mathbf{x}}(\mathbf{T}^2) < +\infty\ \text{とは同値である。}$$

次の例において、$E_x(T^2) = +\infty$ の場合の収束のオーダーについて考察する。

3 例

S は 非負整数の集合とする。生成行列 $Q = \{q(i,j)\}_{i,j\in S}$ を次で定義する。$i \ge 1$ に対して、

$$q(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{if } j = i+1, \\ \alpha_i, & \text{if } j = 0, \\ -(1+\alpha_i), & \text{if } j = i, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

そして、

$$q(0,j) = \delta_{1,j},\ \text{for } j \ge 1, q(0,0) = -1$$

とする。行列 Q で 状態空間 S 上に生成されるマルコフ連鎖が再帰であることと条件 $\sum_i \alpha_i = +\infty$ は同値である。

ここで、$\{\alpha_i\}$ が正数 C に対し

$$\alpha_i = \frac{C}{i}\ \ , i \ge 1,$$

で与えられるときに、Q で生成されるマルコフ連鎖を考える。ここで、T は 以前同様、初再帰時間を表す。次の命題が成立する。

命題 3.1.

$E_0(T^\alpha) < +\infty$ となるための必要十分条件は $\alpha < C$ である。

上の命題を示すために、次の補題 が必要である。

補題 3.2.

$$E_0(e^{-\lambda T}) = \frac{C}{1+\lambda}\int_0^1 \frac{t^{\frac{C}{1+\lambda}}}{\lambda+t}dt$$

このマルコフ連鎖に対して、式

$$m\sum_{j\in S} q(i,j)v_m(j) - \tilde{V}(i)v_m(i) = -1$$

をみたす、関数 $v_m(i)$ を考える。ここで、関数 $\tilde{V}(i)$ は

$$\tilde{V}(i) = 1 + I_{\{0\}}(i) = \begin{cases} 1, & \text{if } i \neq 0, \\ 2, & \text{if } i = 0, \end{cases}$$

という特殊なものを考える。このとき

$$\lim_{m\to+\infty} v_m(i) = \frac{1}{1+\pi(0)}$$

(π は前と同様にこのマルコフ連鎖の定常分布)

である。このとき、収束の速さについて次の事実がわかる。

$C > 2$ のとき

$$v_m(0) - \frac{1}{1+\pi(0)} \sim -k_1(C)\frac{1}{m} \qquad (m \to +\infty)$$

$C = 2$ のとき

$$v_m(0) - \frac{1}{1+\pi(0)} \sim +\frac{2}{9}\frac{1}{m}\log\frac{1}{m} \qquad (m \to +\infty)$$

$1 < C < 2$ のとき

$$v_m(0) - \frac{1}{1+\pi(0)} \sim -k_2(C)\left(\frac{1}{m}\right)^{C-1} \qquad (m \to +\infty)$$

ここで、$k_1(C)$、$k_2(C)$ は正であり、$\lim_{C\downarrow 2} k_1(C) = +\infty$, $\lim_{C\uparrow 2} k_2(C) = +\infty$ となっている。また、$\pi(0) = 1 - \frac{1}{C}$ である。

参考文献

[1] T.Shiga, A.Shimizu and T.Soshi: On the fractional moments of the first returning time for positively recurrent Markov chains. (preprint)